УДК 519.688

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ОБЩЕМ ВИДЕ

© **Р.А. Смирнов**

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений в частных производных; преобразование Лапласа-Карсона.
Обсуждается возможность расширения алгоритма решения дифференциальных уравнений в частных производных в общем виде с применением преобразования Лапласа-Карсона, который рассматривался в предыдущей работе автора.

1 Введение

Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных является одной из актуальных задач компьютерной алгебры. Данная задача связана с проблемами, возникающими во многих областях естествознания, например при описании физических, химических, биологических процессов.

В обыкновенных дифференциальных уравнениях в общем решении присутствуют свободные параметры — числа, определяющие начальные условия. В дифференциальных уравнениях с частными производными свободные параметры — это функции из некоторого класса функций, допускающих преобразование Лапласа-Карсона. Мы будем следовать определениям, данным в работе [1], а именно определению семейства начальных условий, класса функций, допускающих преобразование Лапласа-Карсона, и определению требований к начальным условиям. Мы будем рассматривать только те системы дифференциальных уравнений в частных производных, в которых количество неизвестных функций равно количеству уравнений в системе, а правые части уравнений системы — это функции многих переменных, ограниченные, имеющие конечное число точек разрыва первого рода и не более чем экспоненциальную скорость роста по каждой переменной на ${\mathbb{R}_+}^n$ и обращающиеся в 0 в остальных точках $\mathbb{R}^n$. В соответствии с [1] класс таких функций обозначим через $mathbfS_n$.

2 Определение требований к начальным условиям

Известно, что решение уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных при помощи преобразования Лапласа-Карсона, возможно только при наличии определенных начальных условий [2]. Так, в работе [1] был приведен алгоритм построения множества таких начальных условий для дифференциальных уравнений. Переходя к решению систем дифференциальных уравнений, мы заполним данное множество, применяя алгоритм, предложенный в [1], к каждой из функции в системе дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что каждый из элементов множества начальных условий принадлежит $\mathbf{S_n}$, характеризует поведение искомой функции на границе, а общее количество элементов множества равно сумме максимальных порядков производных искомых функций по отдельным переменным из системы дифференциальных уравнений в частных производных.

3 Определение семейства начальных условий

Пусть искомые функции в заданной системе дифференциальных уравнений не содержат смешанных производных и принадлежат $\mathbb{R}^2$. Тогда, после прямого преобразования Лапласа-Карсона каждого из уравнений системы и решения полученной системы алгебраических уравнений мы получим изображения по каждой из искомой функции. Заметим, каждое из изображений представляет собой дробно-рациональную функцию, что определено спецификой преобразования Лапласа-Карсона.

Обратное преобразование Лапласа-Карсона для двух переменных задается формулой:

$$LC^{-1} : f(x, y) = \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int\limits_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{u(p, q)}{pq} e^{px+qy} dpdq,$$

где $u(p, q)$ — изображение искомой функции, $p = \sigma + i\mu$, $q = \tau + iv$ — комплексные параметры.

Для вычисления оригинала каждой искомой функции с помощью обратного преобразования Лапласа-Карсона необходимо, чтобы $\exists(m,\ n) \in \mathbb{R}^2$ такие, что выполняется неравенство $|u_l| < \infty$ при любых $Re(p) > n > 0$, $Re(q) > m > 0$, где u_l — изображения искомых функций.

Условия, при которых существует оригинал искомой функции, определялись в работе [1]. Пусть система согласованности начальных условий состоит из d уравнений, а матрица ее коэффициентов имеет ранг t. Имеет место равенство $t \leqslant d \leqslant k+m-2$. Тогда мы можем выразить из системы согласованности начальных условий t неизвестных как линейные комбинации остальных $k + m - 2 - t$ свободных неизвестных, при этом коэффициентами будут дробно-рациональные функции.

В качестве свободных переменных могут выступать любые функции из класса $\mathbf{S_n}$. Эти свободные функции перейдут и в искомое решение системы дифференциальных уравнений в общем виде. Заметим, что в некоторых случаях мы специально можем выразить функции начальных условий одной функции через функции начальных условий других, тем самым явно просматривается взаимосвязь функций в системе дифференциальных уравнений.

4 Заключение

В работе показано, что алгоритм, продемонстрированный в работе [1], можно расширить для системы дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящее время на его основе разрабатывается алгоритм в системе компьютерной алгебры *MathPartner* [4–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов Р.А.* Об одном подходе к решению дифференциальных уравнений в частных производных в общем виде // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 2. С. 570-576.
2. *Диткин В.А., Прудникоов А.П.* Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Малашонок Г.И., Смирнов Р.А.* О композиции функций и машинном представлении // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 327-330.
4. *Малашонок Г.И.* О проекте параллельной компьютерной алгебры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 744-748.
5. *Malaschonok G.I.* Project of Parallel Computer Algebra // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1724-1729.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-07-00755-а.

Поступила в редакцию 20 декабря 2012 г.

Smirnov R.A. ABOUT ONE APPROACH TO SOLVING SYSTEMS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE GENERAL FORM.

One approach to constructing an algorithm for the symbolic solving of partial differential equations in general form is describe.

Key words: system of partial differential equations, Laplas-Carson transform.